

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Statistik

Skewness, Kurtosis für zirkuläre Maße (z.B. Phasenkohärenz R)

Problem: nur statische Nichtlinearitäten

Ansatz: transformiere Phasen (Phasendifferenzen) auf Einheitskreis

$$\bar{C} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \mathbf{j}_i; \bar{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin \mathbf{j}_i$$

$$m_1 = \bar{C} + i\bar{S} = \bar{R} e^{i\bar{x}_0} \quad (\bar{x}_0 = \arctan \frac{\bar{S}}{\bar{C}})$$

allgemeiner Ansatz (Momente p -ter Ordnung)

$$m'_p = a_p + ib_p$$

$$a_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos p\mathbf{j}_i; b_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin p\mathbf{j}_i$$

$$m'_p = \bar{R}_p e^{im_p}$$

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Statistik

mit $m'_p = \bar{R}_p e^{im_p}$

folgt für $p = 1$:

$$a_1 = \bar{C}; b_1 = \bar{S}; R_1 = \bar{R}; m_1 = \bar{x}_0 = \arctan \frac{\bar{S}}{\bar{C}}$$

Def.: *zirkuläre Skewness*

$$Skew_{circ} = \bar{R}_2 \sin(m_2 - 2\bar{x}_0) / S^{3/2} \quad (S = 1 - \bar{R})$$

$Skew_{circ} \approx 0$ für unimodale symmetrische Verteilungen

Def.: *zirkuläre Kurtosis*

$$Kurt_{circ} = \left[\bar{R}_2 \cos(m_2 - 2\bar{x}_0) - (1 - S)^4 \right] / S^2$$

$$Kurt_{circ} = \begin{cases} > 0 & \text{platykurtisch} \\ = 0 & \text{unimodal} \\ < 0 & \text{leptokurtisch} \end{cases}$$

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Fourierraum

Spektren höherer Ordnung

C.L. Niklas & A.P. Petropulu: Higher-order spectral analysis: a nonlinear signal processing framework. Prentice Hall, New Jersey, 1993

T. Subba Rao & M.M. Gabr: An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models. Lecture Notes in Statistics, vol. 24, Springer, Berlin, 1984

Polyspektren/Kumulanten/Statistische Momente:

Leistungsspektrum $P=1$ -DFT(AKF ⁽²⁾)	Kumulant 2. Ordnung $AKF^{(2)}(\tau) \propto x(t) x(\tau)$	Moment 2.Ordnung Varianz
Bispektrum $B=2$ -DFT(AKF ⁽³⁾)	Kumulant 3. Ordnung $AKF^{(3)}(\tau) \propto x(t) x(\tau) x(2\tau)$	Moment 3.Ordnung Skewness
Trispektrum $T=3$ -DFT(AKF ⁽⁴⁾)	Kumulant 4. Ordnung $AKF^{(4)}(\tau) \propto x(t) x(\tau) x(2\tau) x(3\tau)$	Moment 4.Ordnung Kurtosis

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Fourierraum

Spektren höherer Ordnung

Erweiterung für bivariaten Fall (speziell: 2. Ordnung)
gegeben zwei stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$

Def.: *Kreuz-Bispektren*

$$B^{xxy}(f_x, f_y) = \langle X(f_x)X(f_y)Y^*(f_x + f_y) \rangle$$

$$B^{xyy}(f_x, f_y) = \langle X(f_x)Y(f_y)Y^*(f_x + f_y) \rangle$$

$$B^{yyx}(f_x, f_y) = \langle Y(f_x)Y(f_y)X^*(f_x + f_y) \rangle$$

$$B^{yxx}(f_x, f_y) = \langle Y(f_x)X(f_y)X^*(f_x + f_y) \rangle$$

$$X(f) = FT(x(t))$$

$$Y(f) = FT(y(t))$$

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Fourierraum

Spektren höherer Ordnung

Erweiterung für bivariaten Fall (speziell: 2. Ordnung)
gegeben zwei stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$

Def.: **Bikohärenz** (Kohärenz 3. Ordnung)

- normalisiertes Bispektrum
(Normierungsfaktoren: Leistungsspektren, Kreuzspektrum)
- Definitionsbereich: $[0,1]$
- erlaubt Detektion von quadratischen Phasenkopplungen
(peaks der Bikohärenz bei bestimmten Frequenz-Paaren)
- Probleme:
Rechenaufwand, Rauschen, Statistik (erfordert lange Zeitreihen)

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

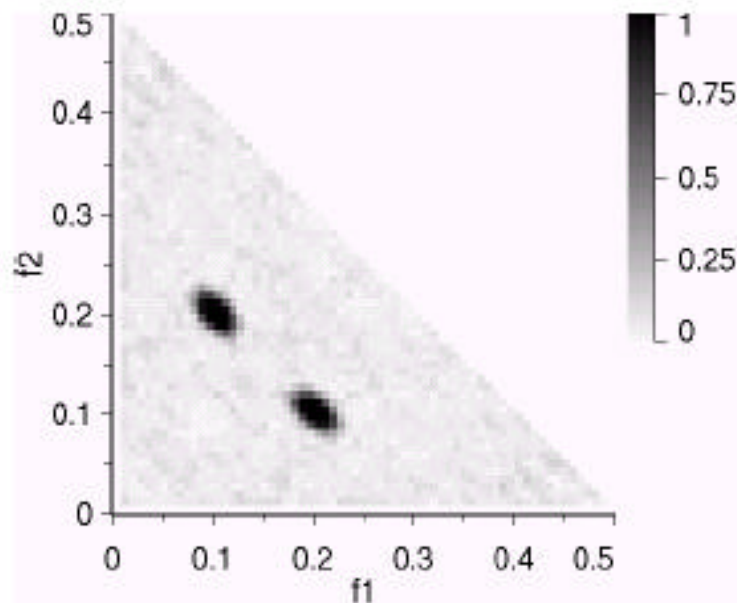
Fourierraum

Bikohärenz

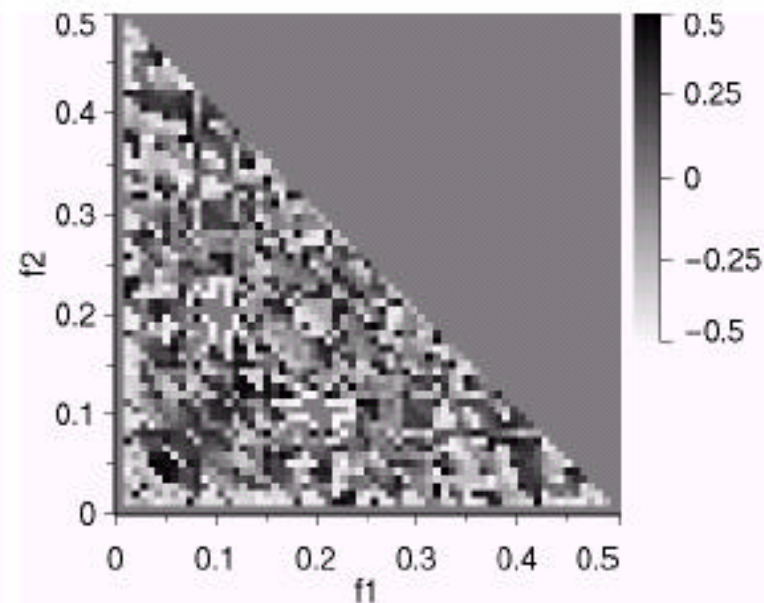
Beispiel: 3-Wellensystem mit quadratischer Phasenkopplung (3 Moden):

$$y(k) = \cos[2\mathbf{p}(f_1 k + \mathbf{j}_1)] + \cos[2\mathbf{p}(f_2 k + \mathbf{j}_2)] + \cos[2\mathbf{p}\{f_1 + f_2\}k + \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2]$$

Betrag(Bikohärenz)



Phase(Bikohärenz)



Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Surrogat

- "Ersatzstoff"
- versucht Eigenschaften des Originals zu reproduzieren

Überprüfung einer speziellen Eigenschaft (z.B. Nichtlinearität)

- zu untersuchende Eigenschaft darf im Surrogat nicht enthalten sein
- alle anderen Eigenschaften müssen vom Surrogat reproduziert werden
- Nullhypothesen-Test:
(z.B. H_0 = Die Daten wurden von stationären, Gaußschen, linearen stochastischen Prozeß generiert)
- parametrisch / nicht-parametrische Statistik

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Wiederholung: *Erstellung von univariaten Surrogaten*

bedingte Realisationen:

(bootstrapping, keine Modellanpassung notwendig !)

- "random shuffling"
- Phasenrandomisierung unter Erhaltung des Amplitudenspektrums (FT)
- amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate (AAFT)
- iterativ amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate (IAAFT)

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

bi-/multivariate Surrogate

(Prichard & Theiler, PRL 73, 951, 1994)

multivariate phasenrandomisierte Surrogate (MFT)

Basis: phasenrandomisierte univariate Surrogate (FT)

Forderung: MFT-Surrogat soll lineare Korrelationen innerhalb der einzelnen Zeitreihen reproduzieren und lineare Korrelationen zwischen ihnen

gegeben: M simultan gemessene Observablen $x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)$ mit Mittelwert 0 und Varianz 1;

$X_1(f), X_2(f), \dots, X_M(f)$ seien die jeweiligen Fouriertransformierten

Kreuzspektrum: $X_j^*(f)X_k(f) = A_j(f)A_k(f)e^{i(\mathbf{j}_k(f) - \mathbf{j}_j(f))}$

Nichtlinearität in Phasendifferenz !

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

bi-/multivariate Surrogate

(Prichard & Theiler, PRL 73, 951, 1994)

Nullhypothese: Daten wurden von stationären, linear korrelierten
Gaußschen stochastischen Prozessen generiert

Methode:

erhalte lineare Eigenschaften:

Kreuzspektrum (Wiener-Khinchin: Kreuzkorrelationsfunktion)

randomisiere nichtlineare Eigenschaften:

ersetze Phasendifferenzen $\delta\varphi(f) = \varphi_k(f) - \varphi_j(f)$ durch $\phi(f) \in [0, 2\pi]$

Rücktransformation ergibt *MFT*:

$$\tilde{x}_j(f) = F^{-1}(X_j(f)e^{i\phi(f)}) \quad \forall j$$

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

bi-/multivariate Surrogate

(Schreiber & Schmitz, Physica D 142, 346, 2000)

multivariate iterativ amplitudenangepasste phasenrandomisierte Surrogate (MIAAFT)

Basis: univariate IAAFT-Surrogate

Forderung (wie MFT): Surrogat soll lineare Korrelationen innerhalb der *einzelnen* Zeitreihen reproduzieren und lineare Korrelationen *zwischen* ihnen
zusätzlich zu MFT: iterative Erhaltung der *jeweiligen* (möglicherweise nicht-Gaußschen) Amplitudenverteilungen

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

bi-/multivariate Surrogate

(Schreiber & Schmitz, Physica D 142, 346, 2000)

Methode:

ersetze Phasendifferenzen $\delta\varphi(f) = \varphi_k(f) - \varphi_j(f)$ durch $\phi(f) \in [0, 2\pi]$
mit den Eigenschaften:

(1) Erhaltung der Original-Phasendifferenzeneigenschaften:

Ansatz: wähle $\phi_n(f) = \text{Rang}(\varphi_n(f)) + \mathbf{a}_n$

wähle \mathbf{a}_n so, das $\varphi_n(f)$ möglichst wenig geändert wird

$$\tan \mathbf{a}_n = \frac{\sum_{m=1}^M \sin(\mathbf{j}_n - \text{Rang}(\mathbf{j}_n))}{\sum_{m=1}^M \cos(\mathbf{j}_n - \text{Rang}(\mathbf{j}_n))}$$

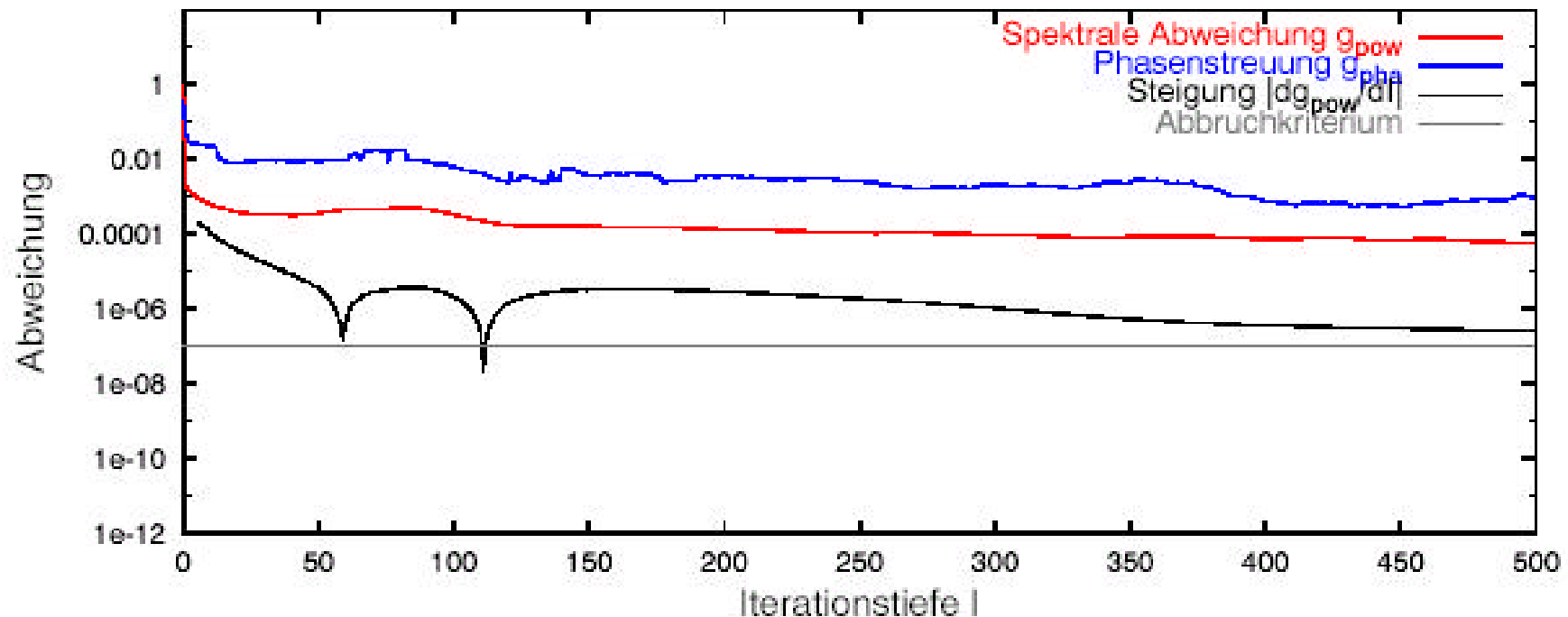
(2) Ersetzung minimal im *least-squares* Sinne: $\sum_{m=1}^M \left| e^{i\mathbf{f}(f)} - e^{i(\mathbf{j}_k(f) - \mathbf{j}_m(f))} \right|^2 \stackrel{!}{=} \min$

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Iterationsverhalten:

MIAAFT für gekoppelte harmonische Oszillatoren (CML)



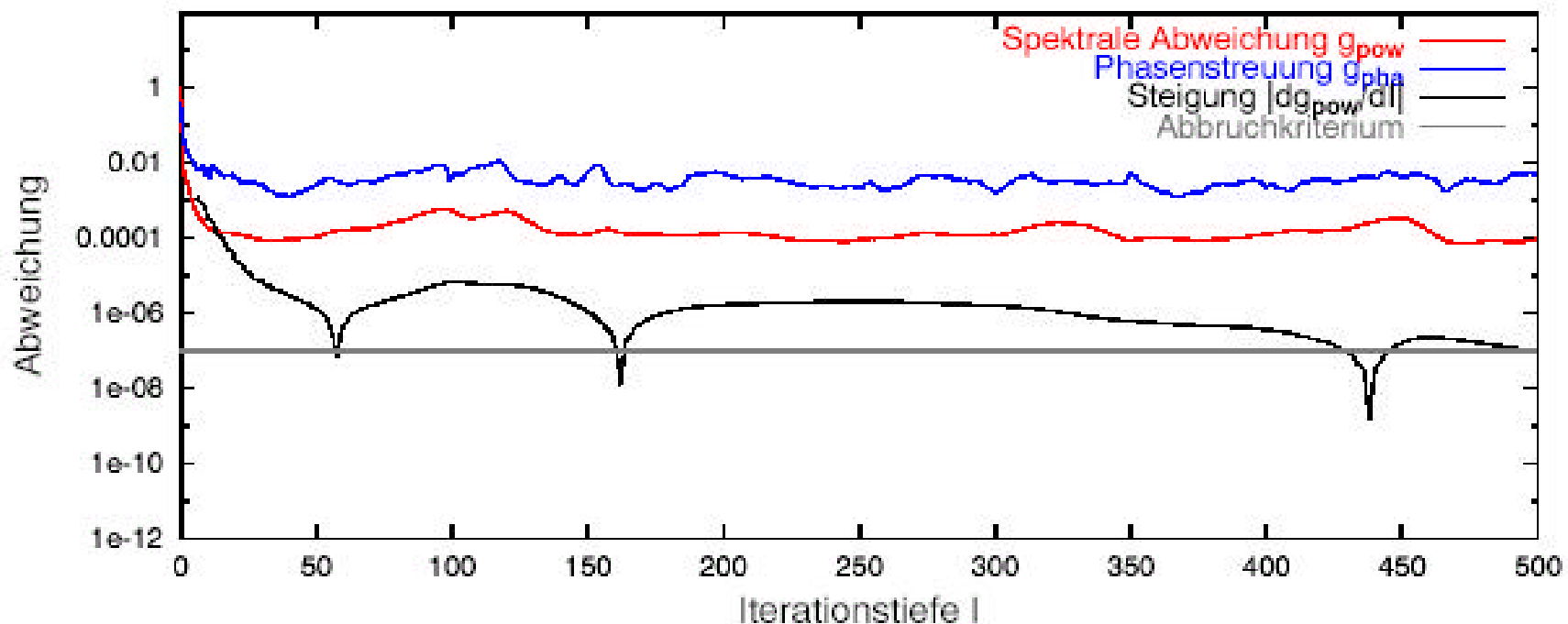
Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

Iterationsverhalten:

MIAAFT für Gaußverteiltes isospektrales Rauschen

(Surrogate von gekoppelten harmonischen Oszillatoren (CML))

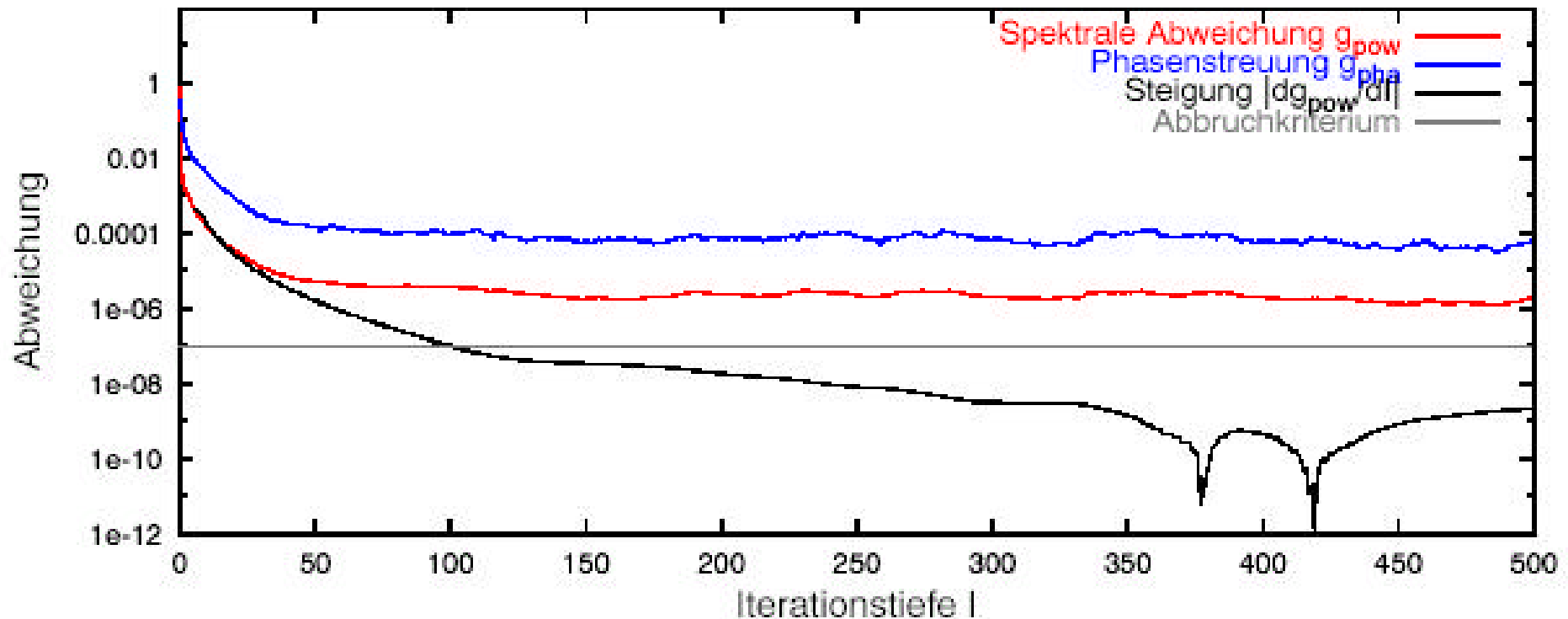


Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

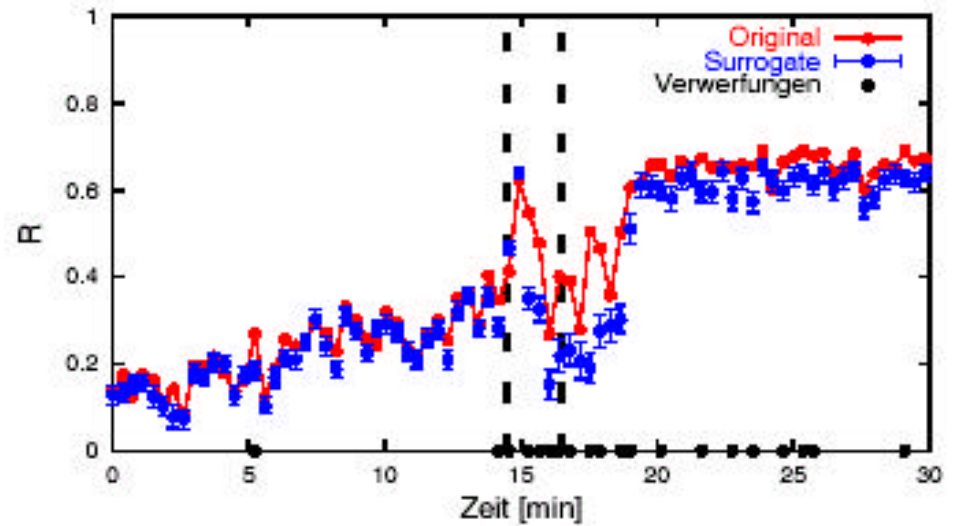
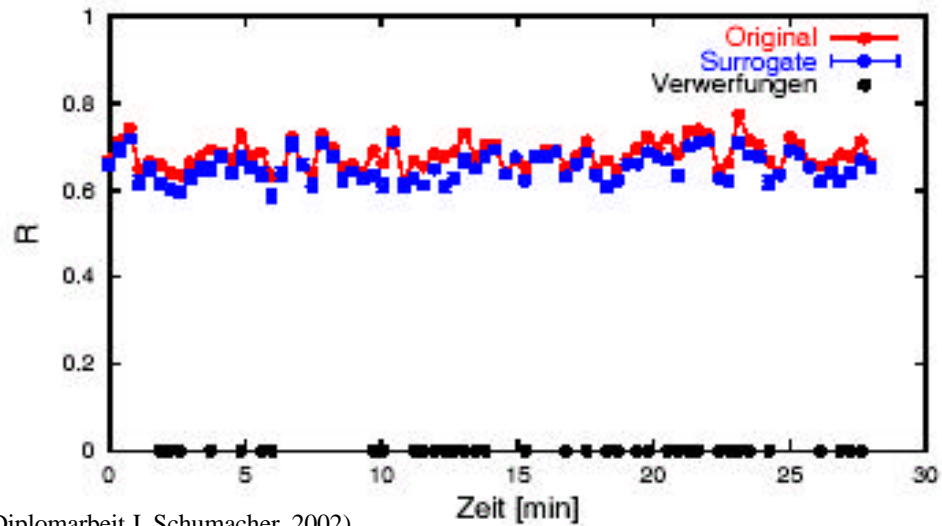
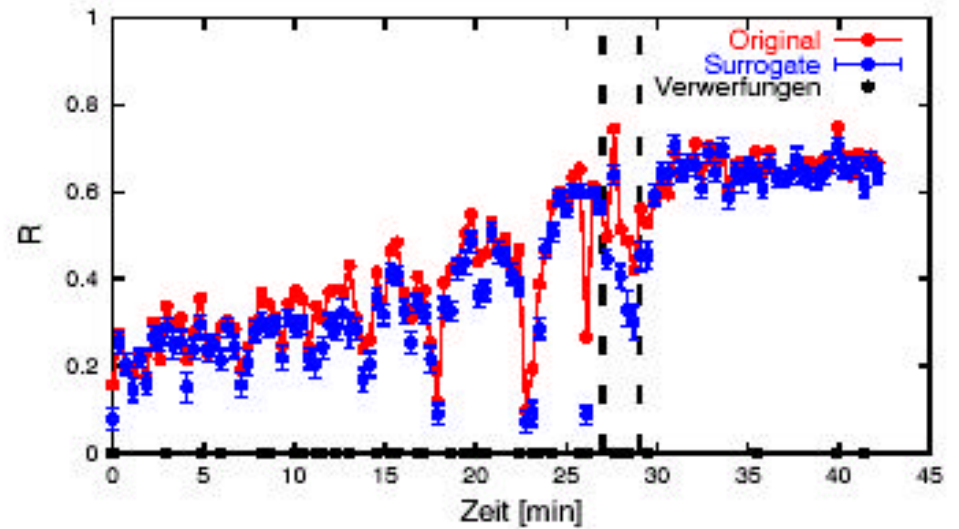
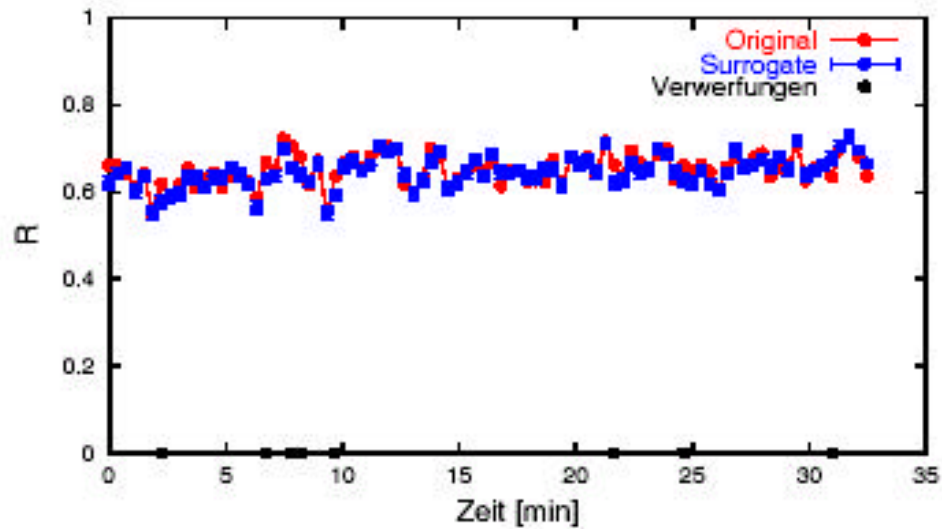
Iterationsverhalten:

MIAAFT für gekoppelte Rössler-Systeme (CML)



Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität (Phasenkohärenz R und Anfallsvorhersage)



Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

bivariate Surrogate für kohärente Daten

(Dolan & Neumann, PRE 65, DOI 026108, 2002)

coherent digitally filtered Surrogate (CDF)

Problem: Artefakte in bivariaten Surrogaten bei (fast-)kohärenten Daten

Forderung: erhalte Spektrum, Kreuzspektrum *und* Kohärenzfunktion

Hypothese: Eigenschaften der Kohärenzfunktion durch Nichtlinearität gegeben

Ansatz: erzeuge Vergleichs-Kohärenzfunktion aus zwei statistisch unabhängigen linearen stochastischen Prozessen $v(t)$ und $w(t)$

$$x(t) = av(t) + (1 - a)w(t)$$

$$y(t) = (1 - a)v(t) + aw(t)$$

$a = 0,5$ vollständige Kohärenz; $a = 0$ keine Kohärenz

Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren

Tests auf Nichtlinearität

coherent digitally filtered Surrogate (CDF)

bestimme frequenzabhängige Kohärenzfunktion für $x(t)$ und $y(t)$:

$$C(f) = \frac{2a(f)[1 - a(f)]}{a^2(f) + [1 - a(f)]^2}$$

Invertierung ergibt Filterfunktion $a(f)$

$$a(f) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{C(f)}{2[1 + C(f)]}}$$

Multiplikation der jeweiligen Fourierspektren mit Filterfunktion $a(f)$ erhält Kohärenzfunktion der Surrogate bzgl. Kohärenzfunktion der Originale