

Dimension (Wiederholung)

- Charakterisierung eines geometrischen Objekts
- Hausdorff-Dimension, verallgemeinerte Dimensionen
- Korrelationsdimension (exp. am einfachsten zugänglich)
- Skalierungsverhalten
- Anzahl der Freiheitsgrade eines Systems
- Maß für Systemkomplexität
- **statisches** Maß der Attraktor-Eigenschaften

Lyapunov-Exponenten (Wiederholung)

- Analyse des Langzeitverhalten eines phys. Systems
- Stabilität / Vorhersagbarkeit
- exponentielle Divergenz / Konvergenz im Phasenraum
- Lyapunov-Spektrum: Wachstumsraten in verschiedenen lokalen Richtungen im Phasenraum
- Relation zur Divergenz: $\langle \text{div} f \rangle = \sum_i \lambda_i$
- größter Lyapunov-Exponent (exp. am einfachsten zugänglich)
- **dynamisches** Maß der Attraktor-Eigenschaften

Dimension und Lyapunov-Exponenten

Charakterisierung einer Dynamik

Dimension (statisch)

reguläre Dynamik	→	D ganzzahlig
chaotische Dynamik		D fraktal
stochastische Dynamik		D $\rightarrow \infty$

größter Lyapunov-Exponent (dynamisch)

reguläre Dynamik	→	$\lambda_1 = 0$
chaotische Dynamik		$\lambda_1 > 0$
stochastische Dynamik		$\lambda_1 \rightarrow \infty$
stabiler Fixpunkt		$\lambda_1 < 0$

Entropien

fundamentales Konzept der *Thermodynamik* und der *statistischen Mechanik*:

Entropie → Unordnung eines Systems

Informationstheorie:

Entropie → Informationsgehalt von
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Informationstheorie (1940-1950): Shannon, Renyi, Kolmogorov

Entropien (Thermodynamik)

beobachte *irreversiblen Prozeß*:

- Ausdehnung eines idealen Gases in zwei vorher getrennte Gefäße mit gleichem Volumen
- N Teilchen, die sich unabh. voneinander bewegen
- jedes Teilchen hat gleiche Wahrscheinlichkeit p , im linken oder rechten Gefäß zu sein
- gleichmäßige Verteilung über beide Volumen wahrscheinlicher als Extremzustände (entweder linkes oder rechtes Gefäß)

Entropien (Thermodynamik)

Wahrscheinlichkeit und Entropie (I)

definiere 2 Zustände:

Zustand 1: alle N Teilchen sind im linken (rechten) Gefäß

Zustand 2: gleichmäßige Verteilung über beide Gefäße

Frage: welcher Zustand ist wahrscheinlicher ?

Zustand 2 praktisch sicher (Wahrscheinlichkeit p fast 1)

Zustand 1 hat nur Wahrscheinlichkeit $p = 2^{-N}$
(z.B.: bei 10 Teilchen $p \approx 10^{-3}$
bei 100 Teilchen $p \approx 10^{-30}$)

allg.: bei N Teilchen sind Wahrscheinlichkeiten zu klein
→ logarithmische Darstellung von p

Entropien (Thermodynamik)

Wahrscheinlichkeit und Entropie (II)

logarithmische Darstellung der Wahrscheinlichkeit eines Zustands

$$S = k \log p$$

(mit $k =$ Boltzmann-Konstante) einfacher zu handhaben

weiterer Vorteil:

Entropie ist additive Zustandsfunktion:

$$P_{ges} = p_1 p_2 \quad S_{ges} = S_1 + S_2$$

Entropien (Thermodynamik)

2. Hauptsatz der Wärmelehre (Erfahrungssatz):

Es gibt kein perpetuum mobile zweiter Art

(ein zyklisch arbeitende thermodynamische Maschine (Kreisprozeß), die Wärmeenergie vollständig in Arbeit umwandelt, kann nicht gebaut werden)

↔ **Konstanz der Entropie S :**

isoliertes System:

Gleichgewichtszustand: $S_{\text{syst}} = \max$ (oder $\Delta S = 0$)

offenes System

Gleichgewichtszustand: $S_{\text{syst}} + S_{\text{umg}} = \max$

$$\Delta S_{\text{syst}} + \Delta S_{\text{umg}} = 0$$

offene Systeme fern vom Gleichgewichtszustand ??

Entropien

Informationstheorie:

Beobachtung eines Systems (Messung)



Informationsquelle

typische Fragen:

Wieviel kann ich (im Mittel) über einen Systemzustand lernen, wenn ich genau **eine** Messung durchführe ?

Wieviel Information gewinne ich über die zukünftige Entwicklung eines Systems, wenn ich seine gesamte Vergangenheit kenne ?

Beispiele: stabiler Fixpunkt, periodische Schwingung, Zufallszahlen

Entropie und Information

Shannon's Informationsmaße (Shannon & Weaver, 1949)

betrachte System mit zwei Zuständen:

Besetzung der Zustände ist a priori unbekannt



Messung (links oder rechts) → linker Zustand besetzt

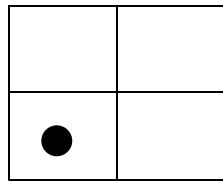
→ Informationsgehalt I : 1 bit

(wenn diese Information vorliegt, eine Frage gespart)

→ **maximaler Informationsgehalt eines Systems
mit 2 Zuständen: 1 bit**

Entropie und Information

betrachte System mit vier Zuständen:
Besetzung der Zustände ist a priori unbekannt



Messung (links/rechts oben/unten) → Zustand unten-links besetzt

→ Informationsgehalt I : 2 bits

→ **maximaler Informationsgehalt eines Systems mit
4 Zuständen: 2 bits**

Entropie und Information

allgemein gilt:

maximaler *Informationsgehalt* I eines Systems mit N Zuständen (verwende \log zur Basis 2):

$$I = \log_2 N$$

Entropie und Information

Messung von statistischen Ereignissen:
mittlerer Informationsgewinn

z.B. Münzwurf:

"Kopf": Wahrscheinlichkeit p_1 oder "Zahl": Wahrscheinlichkeit p_2

gleiche Wahrscheinlichkeiten / Zustände: $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$

Messung \rightarrow "Kopf" \rightarrow Informationsgewinn $I = 1$

Darstellung mittels Wahrscheinlichkeiten:

$$I = -\left(\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2}\right)$$

Entropie und Information

Messung von statistischen Ereignissen:

mittlerer Informationsgewinn

allg. gilt:

Wenn man *a priori* nur weiß, daß 1 ... *n* Ereignisse (oder Systemzustände) mit Wahrscheinlichkeiten $\{p_i\}$ (mit: $\sum p_i = 1$) auftreten und man durch eine Messung lernt, daß das Ereignis *j* stattgefunden hat (oder das System den Zustand *j* eingenommen hat), dann gewinnt man (durch vielfach wiederholtes Messen) die mittlere Information

$$I = - \sum_i p_i \log_2 p_i \quad \text{Shannon-Information}$$

vereinfachte Entropie-Abschätzungen

lineare Verfahren:

Abschätzung der Entropie über Leistungsspektrum

Wiederholung:

Fouriertransformation eines nicht-periodischen Prozesses:

$$v(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \leftrightarrow \quad V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{i\omega t} dt$$

Parseval' sches Theorem

$$\text{Gesamtleistung} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

vereinfachte Entropie-Abschätzungen

mit normiertem Leistungsspektrum

$$S = \sum_{f=0}^{f_{Nyq.}} |V(f)|^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad f_{Nyq.} = \text{Nyquist-Frequenz}$$

folgt Entropie H des relativen spektralen Dichte als:

$$H = - \sum_{f=0}^{f_{Nyq.}} S(f) \log S(f)$$

beschreibt Gleichförmigkeit des Leistungsspektrums:

$H = \text{min.}$ für Linienspektrum (einzelne Frequenzkomponente)

$H = \text{max.}$ für breitbandiges Spektrum (weißes Rauschen)

anwendbar bei chaotischen Dynamiken ????? (weißes Spektrum !!)

Entropien von statischen Verteilungen

Renyi-Entropien der Ordnung q :

charakterisieren den Informationsgehalt, der notwendig ist, um den Wert einer Observablen mit einer gewissen Unsicherheit anzugeben, wenn lediglich eine Wahrscheinlichkeitsdichte gegeben ist, daß die Observable den Wert w hat.

Partitionierung des m -dimensionalen Phasenraums mit M Hyperkuben der Kantenlänge ε ($\varepsilon \rightarrow 0$); betrachte Wahrscheinlichkeit p_i , einen Punkt des Attraktors in Hyperkubus i ($i=1, \dots, M(\varepsilon)$) zu finden:

$$p_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N_i}{N} \quad \begin{array}{l} N_i = \text{Anzahl der Trajektorienpunkte in Zelle } i \\ N = \text{Gesamtanzahl der Trajektorienpunkte} \end{array}$$

$$\Rightarrow \tilde{H}_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right) \quad \begin{array}{l} q = 0, 1, 2, \dots, \infty \\ \text{(Wichtung der} \\ \text{Wahrscheinlichkeiten)} \end{array}$$

Entropien von statischen Verteilungen

$q \rightarrow 1$ (Regel von de l'Hospital) $\tilde{H}_1 = S = \text{Shannon-Entropie}$

$$\tilde{H}_q = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-q} \log \left(\sum_{i=1}^{M(\varepsilon)} p_i^q \right)$$



$$\tilde{H}_1(\varepsilon) = S(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \sum_{i=0}^{M(\varepsilon)} p_i \log p_i \right)$$

Nur \tilde{H}_1 ist *additiv* :

Entropie eines Verbundprozesses ist Summe der Entropien der Einzelprozesse

Entropien von statischen Verteilungen

Beispiel: Renyi-Entropie einer Gleichverteilung

gegeben: Wahrscheinlichkeitsdichte $\mu(x)$:

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Partitionierung des Einheitsintervalls: N Intervalle der Länge $\varepsilon = 1/N$
ergibt:

$$\tilde{H}_q(\varepsilon) = \frac{1}{1-q} \log(N\varepsilon^q) = -\log \varepsilon \quad \text{unabh. von } q !!$$

→ alle Entropien sind gleich

(klar, homogene Verteilung vorausgesetzt)

→ *maximale* Entropie einer ε -Partition ist $-\log \varepsilon$

Entropien von Übergangswahrscheinlichkeiten

Verallgemeinerung: Renyi-Block-Entropien der Blockgröße m :
dynamische Renyi-Entropien: berücksichtigen *zeitliche Korrelationen*

Partitionierung einer Linie in Intervalle I der Länge ε ($\varepsilon \rightarrow 0$); betrachte Verbundwahrscheinlichkeiten P_{i_1, i_2, \dots, i_m} , daß eine Observable zum Zeitpunkt n in das Intervall I_{i_1} fällt, zum Zeitpunkt $n+1$ in das Intervall I_{i_2} , usw.:

$$\Rightarrow H_q(m) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1-q} \log \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m} p_{i_1, i_2, \dots, i_m}^q \quad q = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

für $m \rightarrow \infty$ gehen die Block-Entropien in die verallgemeinerten Entropien der Ordnung q über:

$$h_q = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} H_q(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} H_q(m+1) - H_q(m)$$

Entropien von Übergangswahrscheinlichkeiten

$m \rightarrow \infty$

$q \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$ topologische Entropie h_0 (auch K_0 genannt)

Relation zur Hausdorff-Dimension:

D_0 zählt die Anzahl der nichtleeren Kuben

h_0 zählt die Anzahl unterschiedlicher Orbits

Entropien von Übergangswahrscheinlichkeiten

$m \rightarrow \infty$

$q \rightarrow 1 \quad \Rightarrow$ Kolmogorov-Sinai Entropie h_1 (auch K_1 genannt)

Relation zur Informations-Dimension:

D_1 beschreibt Informationszuwachs, einen Trajektorienpunkt in Hyperkubus i zu finden

h_1 mittlere Rate, mit der Information über Systemzustand im Laufe der Zeit verloren geht

Entropien von Übergangswahrscheinlichkeiten

Beispiel: Datenakquisition mit einem 8 bit A/D-Wandler

Partitionierung: 2^8 Intervalle der Größe 2^{-8}

betrachte Übergangswahrscheinlichkeiten p_{jk} von beliebigem Intervall I_j in Intervall I_k

falls p_{jk} für alle Intervalle gleich (2^{-8})

→ Verbundwahrscheinlichkeiten faktorisieren und es folgt:

$$H_q(m) = m \log 2 \quad (\text{unabh. von } q !!!)$$

Faktorisierung gilt nur für unkorreliertes (weißes) Rauschen

→ jede Korrelation in den Daten reduziert die Entropie !

Entropien

im allgemeinen gilt: $K_{q'} \leq K_q \quad q' > q$

- **dynamisches** Maß eines Attraktors
- Maß für Systemunordnung
- mittlere Rate des Informationsverlustes \rightarrow mittlere Prädiktionszeit

$$T_p \approx \frac{1}{K} \log(\rho^{-1})$$

ρ : Lokalisationsgenauigkeit des Anfangszustandes

reguläre Dynamik

chaotische Dynamik

stochastische Dynamik



$K = 0$

$K > 0$

$K \rightarrow \infty$

Berechnung der Entropien

- Entropie interessant, liefert Information über
 - Vorhersagbarkeit eines Systems
 - Topologie des Faltungsprozesses

aber

- i.a. schwierig aus Zeitreihen zu berechnen, insbesondere für hochdimensionale Systeme:
 - erfordert mehr Datenpunkte als Berechnung von Dimensionen oder Lyapunov-Exponenten
 - insbesondere Grenzwert $m \rightarrow \infty$ schwierig

Berechnung der Entropien

direktester Ansatz:

box-counting (wie bei Abschätzung der verallg. Dimensionen):

- Skalierung der Daten auf Einheitsintervall
- Überdeckung des Phasenraums mit $1/\varepsilon$ Intervalle der Größe ε
- Bestimmung der Verbundwahrscheinlichkeiten P_{i_1, i_2, \dots, i_m}
(zähle die Anzahl n_{i_1, i_2, \dots, i_m} der Segmente einer Zeitreihe, die in eine Sequenz I_{i_1, i_2, \dots, i_m} von Intervallen fallen)
- Auswertung von m -dimensionalen Histogrammen

erfordert hohe Speichermengen,

begrenzte Größe der Intervalle \rightarrow Randeffekte

Skalierungsverhalten eher schlecht

\rightarrow **inpraktikabel**

Berechnung der Entropien

alternativer Ansatz: *importance sampling*

- keine gleichförmige Verteilung der Partitionen im Phasenraum
- besser: Zentrierung der Partitionen um Zustandsvektoren
(wie bei Berechnung der Korrelationssumme)

→ "Korrelations"-Entropie K_2
(Grassberger und Procaccia, 1983)

betrachte $q > 1$:

- Partitionierung: Hyperkugeln mit festem Radius ε
- berechne Zeitreihenschätzer "Korrelationssumme" für steigende Einbettungen m :

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon - |\mathbf{v}_m(i) - \mathbf{v}_m(j)|)$$

Berechnung der Entropien

für $q = 2$ vorher gezeigt, daß Korrelationsdimension aus Korrelationssumme ableitbar ist:

$$C(m, \varepsilon) = \text{const.} \varepsilon^{D_2}$$

allgemein gilt für $q > 1$:

$$C_q(m, \varepsilon) \propto \varepsilon^{D_q} e^{-H_q(m)}$$

- prinzipiell fehlt jetzt noch Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$
ist jedoch aufgrund der Begrenztheit der Daten (Datenlänge, Auflösung, Rauschen) uninteressant
- falls Skalierungsregion nachweisbar $\rightarrow \varepsilon$ -unabhängig
- falls nicht, Verfahren nicht anwendbar !!!!

Berechnung der Entropien

falls Skalierungsregion nachweisbar:

$$\varepsilon^{D_q} \approx \text{const.}$$

Korrelations-Entropie dann bestimmbar gemäß:

$$h_q(m) = H_q(m+1, \varepsilon) - H_q(m, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \log \left[\frac{C_m(\varepsilon)}{C_{m+1}(\varepsilon)} \right] = K_2$$

Überprüfung der Robustheit:

(nahezu) Konstanz für

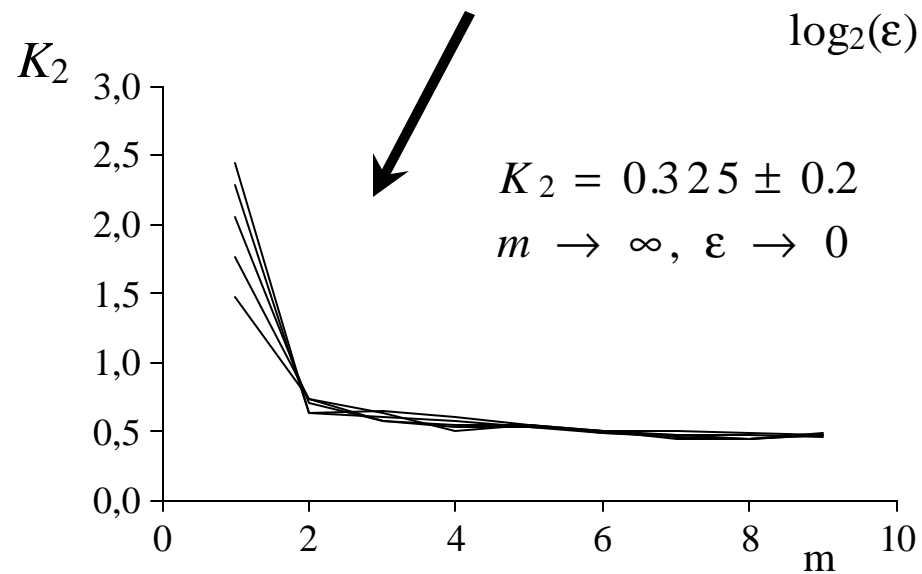
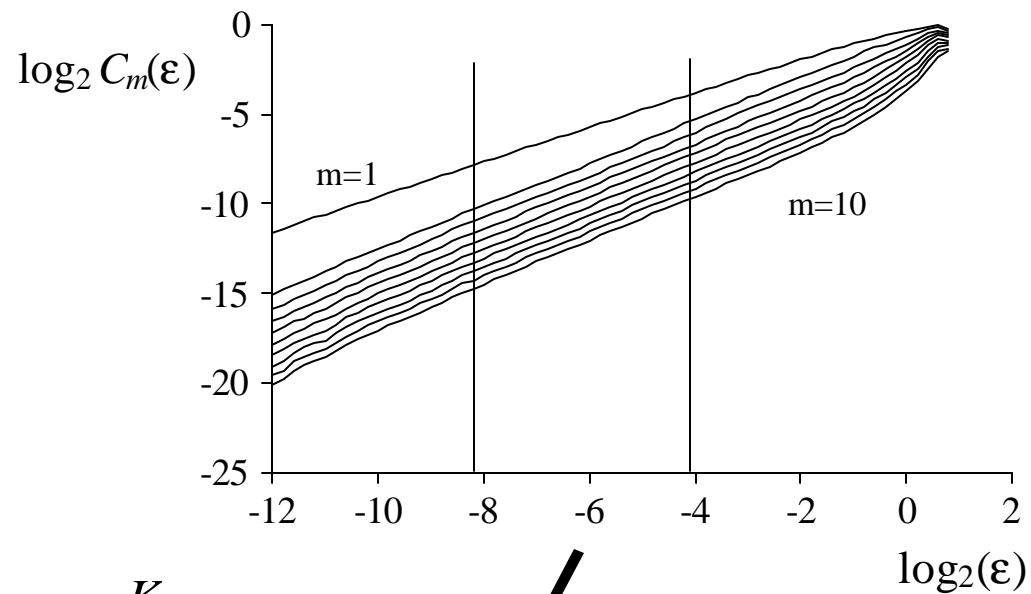
ε -Bereich (Skalierungsregion) und
Bereich von Einbettungsdimensionen m

Problem: Statistik (genügend Datenpunkte !!)

Verlust von ε^{-h} Nachbarn beim Übergang von $m \rightarrow m+1$

Berechnung der K_2 -Entropie

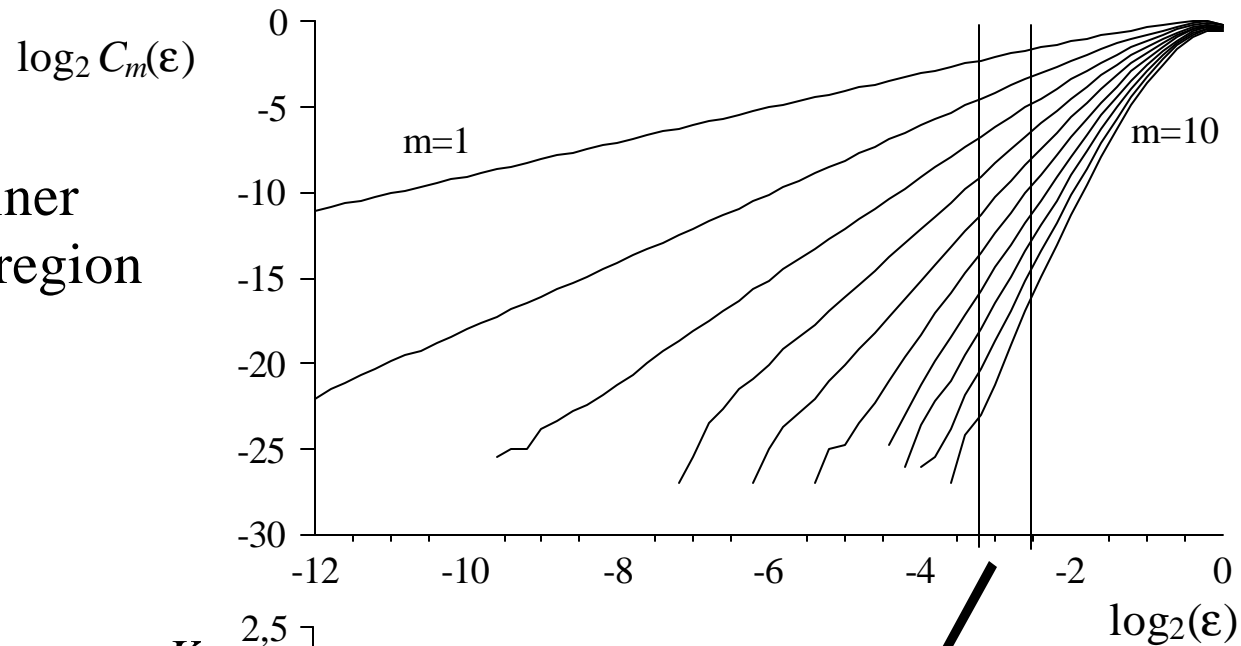
Beispiel: Hénon-Abbildung



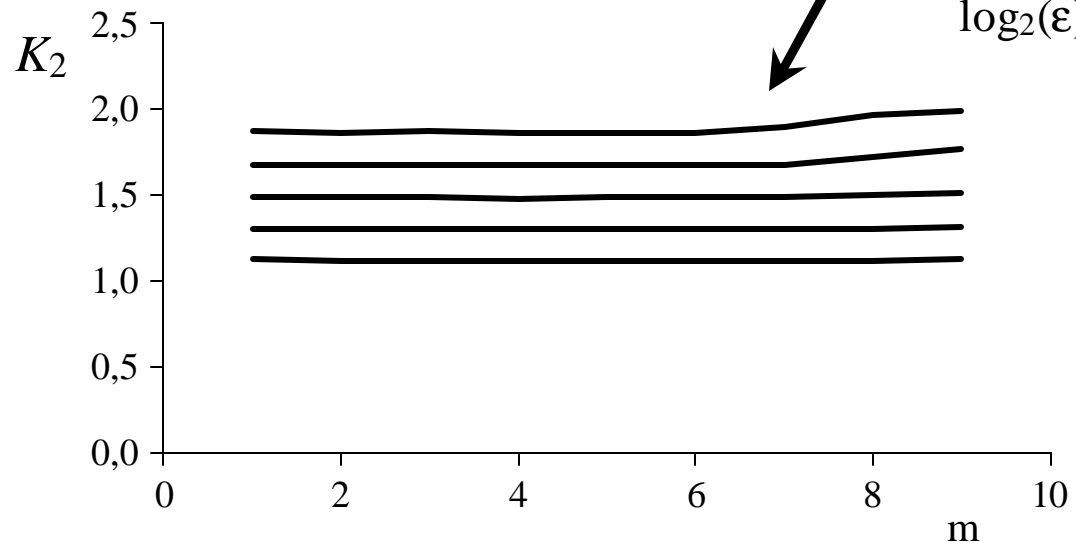
Berechnung der K_2 -Entropie

Beispiel: Weißes Rauschen

Nachweis einer
Skalierungsregion
schwierig

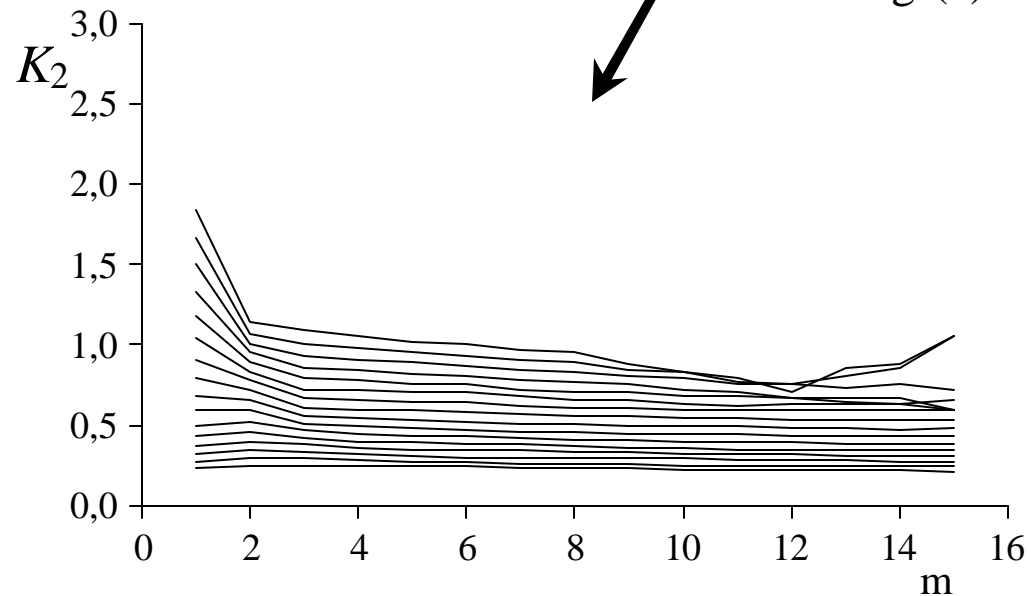
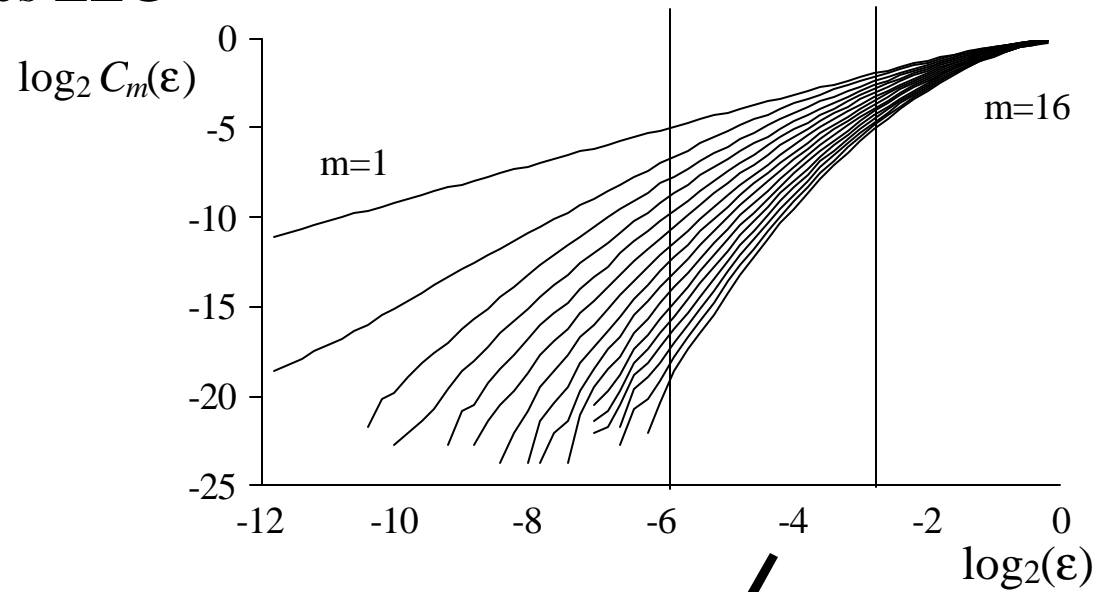


keine Konstanz
für ϵ -Bereich



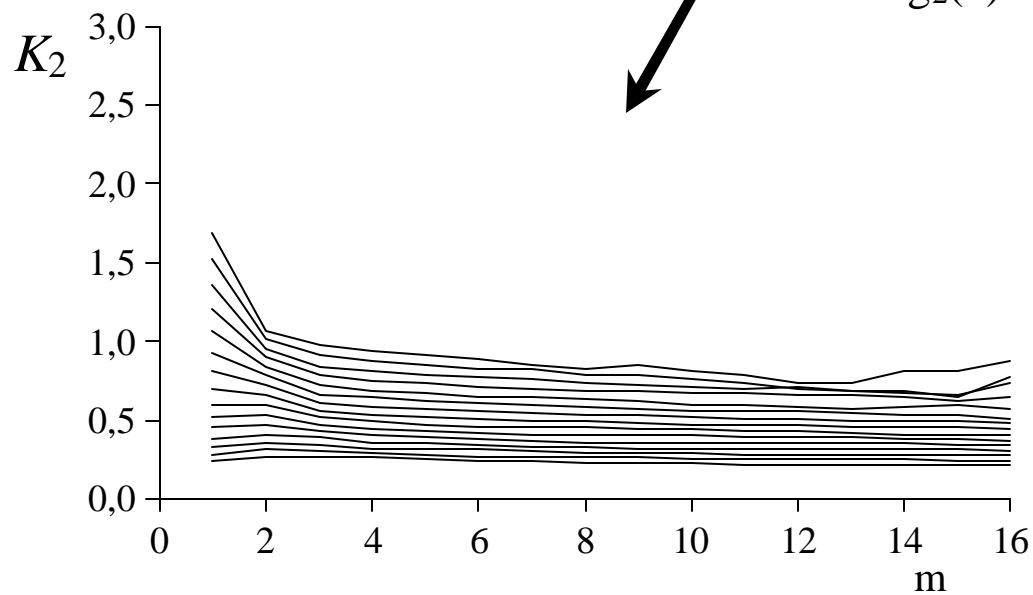
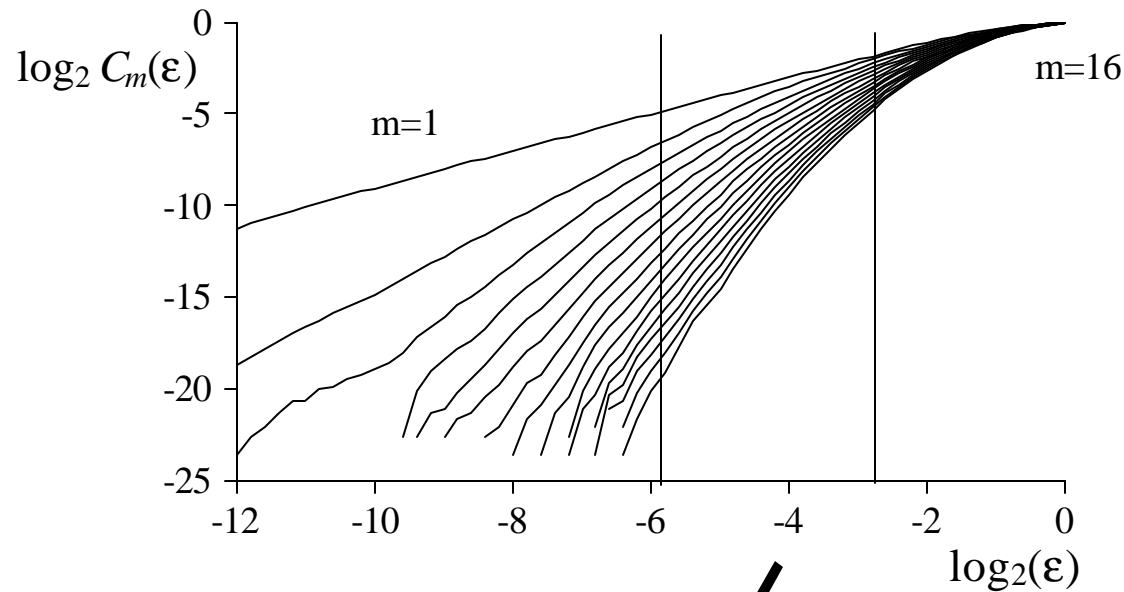
Berechnung der K_2 -Entropie

Beispiel: normales EEG



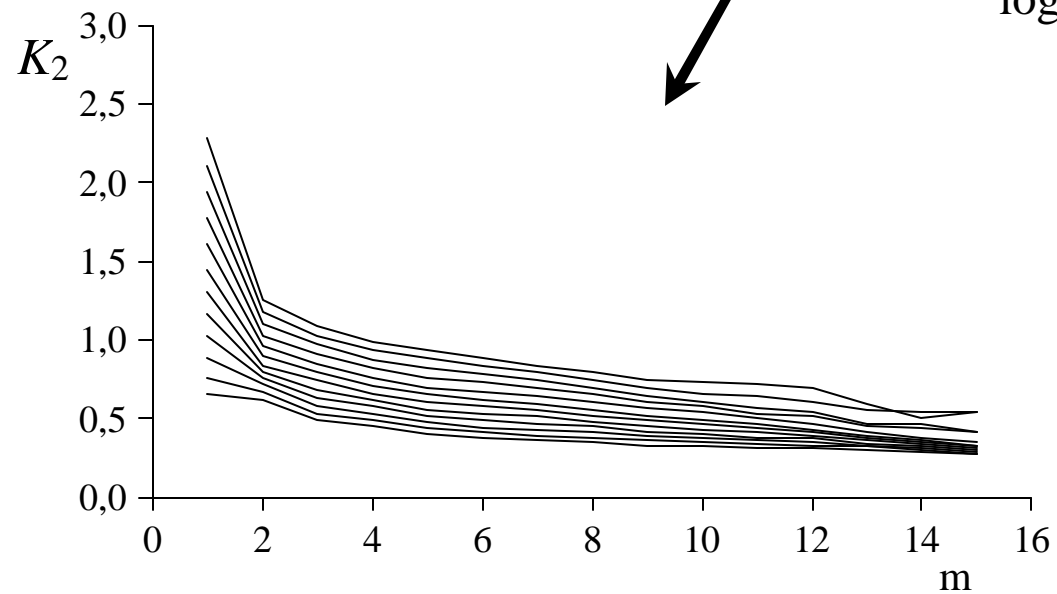
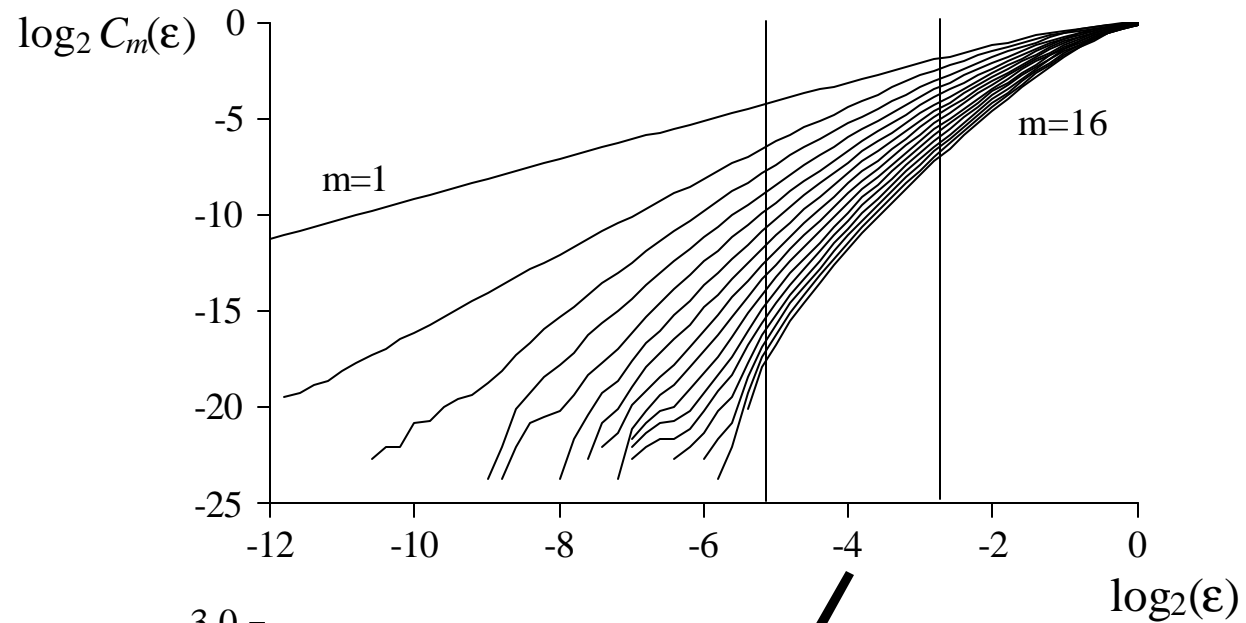
Berechnung der K_2 -Entropie

Beispiel: normales EEG (Pat.)



Berechnung der K_2 -Entropie

Beispiel: Anfalls-EEG



vereinfachte Entropie-Abschätzungen

Approximate Entropy (ApEn) (Pincus, 1991)

- gilt **nicht** als Abschätzung der Kolmogorov-Sinai-Entropie, obwohl ähnliches Analyseverfahren
- "anschauliches" Verfahren, das mit wenig Daten auskommt
- betrachte $m = 2$ und ε fest (typisch 15% der Standardabweichung der Signalamplitude):

$$ApEn = -\log \frac{C_2(\varepsilon_{fix})}{C_3(\varepsilon_{fix})}$$

- keine **Charakterisierung** von Dynamiken
- nur **Differenzierung** zwischen deterministisch und stochastisch

vereinfachte Entropie-Abschätzungen (ApEn)

einfach zu berechnen

- nur Korrelationssummen für $m = 2$ und $m = 3$

$$m = 2 \quad C_2(\varepsilon_{fix}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon_{fix} - |\mathbf{v}_2(i) - \mathbf{v}_2(j)|)$$

$$m = 3 \quad C_3(\varepsilon_{fix}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon_{fix} - |\mathbf{v}_3(i) - \mathbf{v}_3(j)|)$$

- N typischerweise $30^m \approx 1000$

- keine limes-Bildung für ε

vereinfachte Entropie-Abschätzungen (ApEn)

betrachte Änderung der Phasenraumvektoren

$$\mathbf{v}_2(i) = (v(i), v(i+1))$$

$$\mathbf{v}_3(i) = (v(i), v(i+1), v(i+2))$$

$$\mathbf{v}_2(i+1) = (v(i+1), v(i+2))$$

$$\mathbf{v}_3(i+1) = (v(i+1), v(i+2), v(i+3))$$

Beobachtung:

- in deterministischen Systemen nahezu gleiche Änderung in zwei- und drei-dimensionaler Einbettung $\rightarrow \text{ApEn} \approx 0$
- Nichtlinearität äußert sich speziell in $v(i+2) \rightarrow \text{ApEn} > 0$
- in stochastischen Systemen generelle Änderung $\rightarrow \text{ApEn} \gg 0$

vereinfachte Entropie-Abschätzungen

über Relation Entropie - Vorhersagbarkeit

$$T_p \approx \frac{1}{K} \log(\rho^{-1})$$

Abschätzung der mittleren Prädiktionszeit mittels nichtlinearen Vorhersagefehler.

Kostenfunktion:
$$e(k) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}(i) - \mathbf{v}(i+k))^2}$$

mit $k =$ Prädiktionshorizont, $\mathbf{v}(i) =$ Phasenraumvektoren

Prädiktionszeit T_p entspricht k , wenn e minimal

Charakterisierung einer Dynamik

Dynamik	charakterisierende Maße
regulär	D ganzzahlig, $\lambda_1 = K = 0$
chaotisch	D fraktal, $(\lambda_1, K) > 0$
stochastisch	$(D, \lambda_1, K) \rightarrow \infty$

Dimensionen, Entropien und Lyapunov-Exponenten charakterisieren dieselbe zugrundeliegende Dynamik *unter verschiedenen Aspekten*.

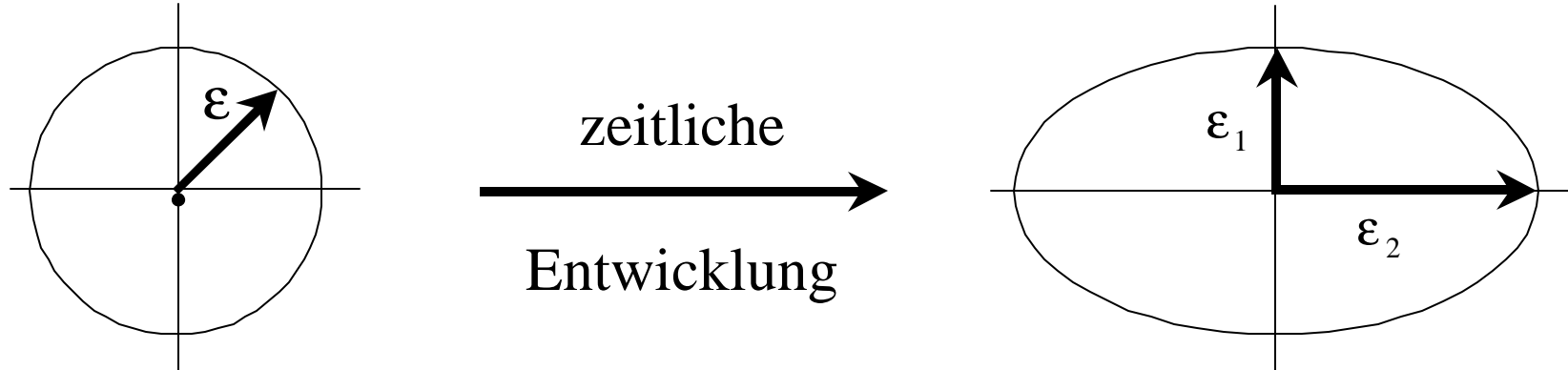
Gibt es Zusammenhänge zwischen den Maßen ?

Zusammenhang zwischen D , K und λ

positive Lyapunov-Exponenten:

→ exponentielle Divergenz benachbarter Trajektorien

→ Informationsverlust über zukünftige Positionen im Phasenraum



Anfangszustand $x(t_0)$

ε -Ball = Unsicherheit bzgl.

Position (z.B. durch Rauschen)

zukünftiger Zustand $x(t)$

Ball → Ellipsoid

Streckung / Kontraktion der
Halbachsen mit $e^{\lambda_i t}$

Zusammenhang zwischen D , K und λ

Entropie

mittlerer
Informationsverlust



Lyapunov-Exponenten

exponentielle Divergenz
anfänglich benachbarter
Trajektorien

Pesin's Identität (1977):
$$K_1 = \sum_{i, \lambda_i > 0} \lambda_i$$

Kolmogorov-Sinai-Entropie



Summe der positiven
Lyapunov-Exponenten

Zusammenhang zwischen D , K und λ

$$K_1 \leq \sum_{i, \lambda_i} \lambda_i$$

Summe der positiven Lyapunov-Exponenten ist obere Schranke der Kolmogorov-Sinai-Entropie K_1 (Ruelle, 1978)

Zeitreihenanalyse:

Mangel an Daten \rightarrow gute Schätzung der K_1 aus Summe der positiven Lyapunov-Exponenten

Konsistenzüberprüfung:

- Berechnung der K_2 aus Korrelationssumme
- wegen $K_{q'} \leq K_q \quad q' > q$

muß gelten:
$$K_2 \leq \sum_{i, \lambda_i} \lambda_i$$

Zusammenhang zwischen D , K und λ

Vermutung von Kaplan und Yorke (1979)

$$D_{KY} = k + \frac{\sum_{i=1}^k \lambda_i}{|\lambda_{k+1}|} \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \geq 0 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i < 0$$

$$D_{KY} = D_1$$

für 2-dim. Abbildungen bestätigt; Allgemeingültigkeit bisher noch offen;
es gibt auch Gegenbeispiele;

Kaplan-Yorke-Dimension

