

# *Lyapunov-Exponenten*

Analyse des Langzeitverhaltens ( $t \rightarrow \infty$ ) eines physikalischen Systems:

- $t \rightarrow \infty$  tritt bei konkreten beobachteten Systemen nicht auf  
 $t \gg \tau$  ( $\tau$ : charakteristische Systemzeit)
- $t$ : Dauer der Beobachtung, Prognosezeitraum, ...
- Langzeitverhalten:  
(erste) *Klassifizierung von dynamischen physikalischen Systemen*

# *Lyapunov-Exponenten*

Arten des Langzeitverhaltens:

- *unbeschränktes Wachstum*

tritt konkret nicht auf;

bei Modellen: zeitliche Stabilisierung oder Modellwechsel

- *beschränkte Dynamik*

- Fixpunkt/Ruhepunkt/Gleichgewichtspunkt

- periodische oder quasi-periodische Bewegung

- chaotische Bewegung

- *Frage*

wie **stabil** ist die Dynamik/wie **ändert** sich die Dynamik ?

bei Änderung der Kontrollparameter

bei Übergang zu benachbartem Punkt im Phasenraum

# *Lyapunov-Exponenten*

Stabilitätsdogma (Andronov & Pontryagin, 30iger Jahre):

*Da alle mathematischen Modelle Vereinfachungen, Abstraktionen sind, sollten anwendungsrelevante Modelle strukturell stabil sein.*

↓ aber

einfache Modelle aus physikalisch akzeptablen Bausteinen sind strukturell instabil

↓ (vgl. starke/schwache Kausalität)

welche Zustände führen zu gleichem/ähnlichen Langzeitverhalten ?

→ **Lyapunov-Stabilität**

# *Lyapunov-Exponenten*

*Def.:* Eine Trajektorie  $\Phi_t(\mathbf{x}_0)$  heißt *Lyapunov-stabil*, wenn sie mit einem  $\varepsilon$ -Schlauch umgeben werden kann und man dabei eine  $\delta$ -Umgebung findet, so daß Trajektorien, die in dieser  $\delta$ -Umgebung starten, für alle künftigen Zeiten innerhalb des  $\varepsilon$ -Schlauches verlaufen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon), \forall \mathbf{y}_0 \quad |\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0| < \delta, |\Phi(\mathbf{x}_0) - \Phi(\mathbf{y}_0)| < \varepsilon \quad \forall t$$

# *Lyapunov-Exponenten*

*chaotische Trajektorien sind Lyapunov-instabil:*

## *Divergenz:*

benachbarte Trajektorien bewegen sich mit der Zeit exponentiell auseinander (*Strecken*)

## *Konvergenz:*

Auseinanderlaufen der Trajektorien mit endlichem Abstand der Startpunkte nur bis Maximalabstand (wenn Attraktor kompakt), danach wird Abstand wieder kleiner (*Falten*)

## *Lyapunov-Exponenten*

*"The exponential divergence or convergence of nearby trajectories is conceptually the most basic indicator of deterministic chaos."  
(Sano & Sawada, 1985)*

# *Lyapunov-Exponenten*

exponentielle Divergenz und Konvergenz



sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen, Störungen



Lyapunov-Exponenten

reelle Zahlen,

beschreiben Stabilität im Rahmen der Störungsanalyse



Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas?  
E. Lorenz, December 1972. Meeting of the American Association for the Advancement  
of Science in Washington, D.C.

# *Lyapunov-Exponenten*

Störungsanalyse:

$\delta x$  sei eine kleine (differenzielle) Störung in den Anfangsbedingungen

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

$$\frac{d(x + \delta x)}{dt} = f(x + \delta x)$$

$$= f(x) + \delta x D_{f(x)} + O(2) \quad \text{Taylorreihenentwicklung}$$

$D_{f(x)}$  Jacobi-Matrix

# *Lyapunov-Exponenten*

Störungsanalyse:

mit lokaler Linearisierung:  $\frac{d\delta x}{dt} = \delta x D_{f(x)}$

wird die unter dem Einfluß der Störung vorliegende Abweichung von der Trajektorie ausgedrückt durch:

$$\delta x(t) = \delta x(0)e^{\lambda t}$$

mit  $\lambda =$  Lyapunov-Exponent.

# *Lyapunov-Exponenten*

im  $m$ -dimensionalen Phasenraum:

-Lyapunov-Spektrum  $\lambda_i, i = 1, \dots, m$

Wachstumsraten in verschiedenen lokalen Richtungen im Phasenraum

Relation zur Divergenz:  $\langle \text{div}f \rangle = \sum_i \lambda_i$

dissipatives System:  $\sum_i \lambda_i < 0$

größter Lyapunov-Exponent  $\lambda_1$

reguläre Dynamik

chaotische Dynamik

stochastische Dynamik

stabiler Fixpunkt



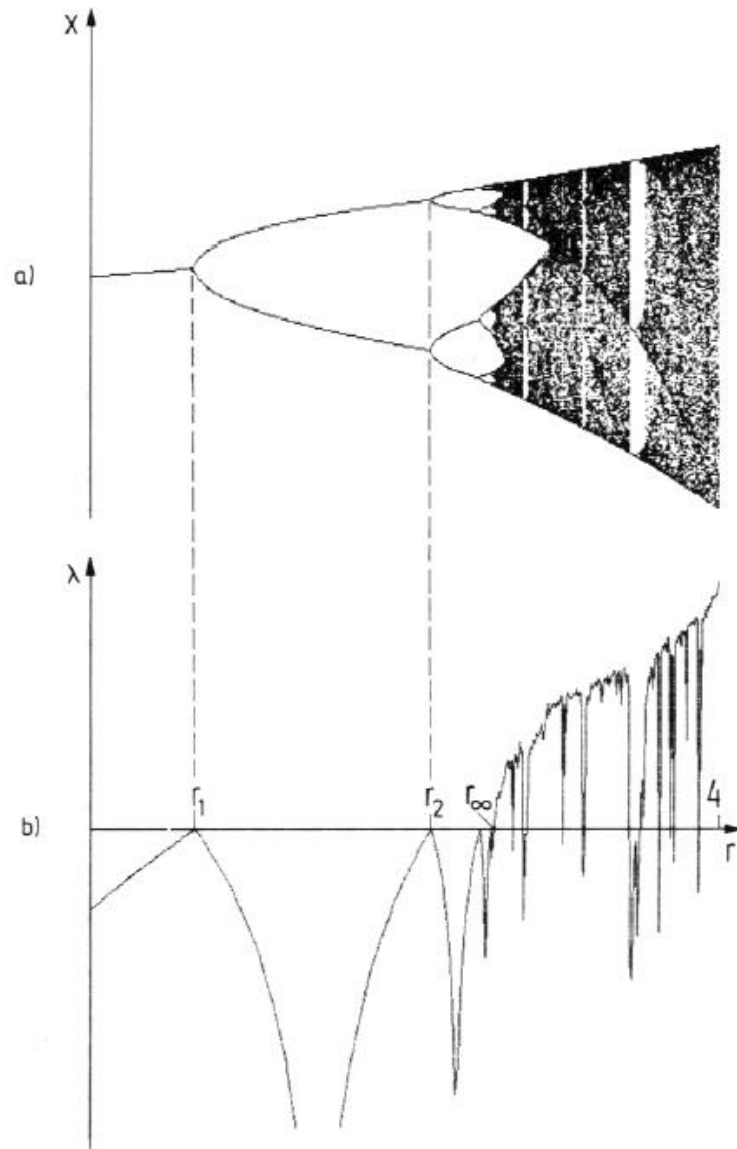
$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_1 > 0$$

$$\lambda_1 \rightarrow \infty$$

$$\lambda_1 < 0$$

# *Lyapunov-Exponenten*



Veränderung des größten Lyapunov-Exponenten der logistischen Abbildung bei Ändern des Kontrollparameters  $r$

# *Lyapunov-Exponenten*

Bestimmung der Lyapunov-Exponenten:

- Spektrum i.A. schwierig (Rauschen, Fehlerfortpflanzung)

(Sano & Sawada, 1985; Eckmann et al., 1986; Stoop & Parisi, 1991)

- Beschränkung auf größten Lyapunov-Exponenten  $\lambda_1$

(Wolf et al. 1985; Rosenstein et al., 1993; Kantz, 1994)

# *Lyapunov-Exponenten*

Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten (I):

- bestimme geeignete Referenztrajektorie  $x(t)$   
(typischer Startpunkt und möglichst viele Punkte in dessen Umgebung)
- suche benachbarte Trajektorie  $y_1(t)$

bestimme Anfangsabstand

$$d_1(0) = |x(0) - y_1(0)|$$

Abstand nach  $T$  Zeitschritten

$$d_1(T) = |x(T) - y_1(T)|$$

berechne Streckungsfaktor

$$\Lambda(1) = \frac{d_1(T)}{d_1(0)}$$

Wahl von  $T$ :

zu klein  $\rightarrow$  Rauschen dominiert, zu groß  $\rightarrow$  Attraktorgrenzen schnell erreicht

# *Lyapunov-Exponenten*

Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten (II):

- suche neue benachbarte Trajektorie  $y_2(t)$  zu  $x(T)$   
(mit kleinem Abstandsbetrag und möglichst gleicher Orientierung)

bestimme Anfangsabstand

$$d_2(0) = |y_2(0) - x(T)|$$

Abstand nach  $2T$  Zeitschritten

$$d_2(T) = |y_2(T) - x(2T)|$$

berechne Streckungsfaktor

$$\Lambda(2) = \frac{d_2(T)}{d_2(0)}$$

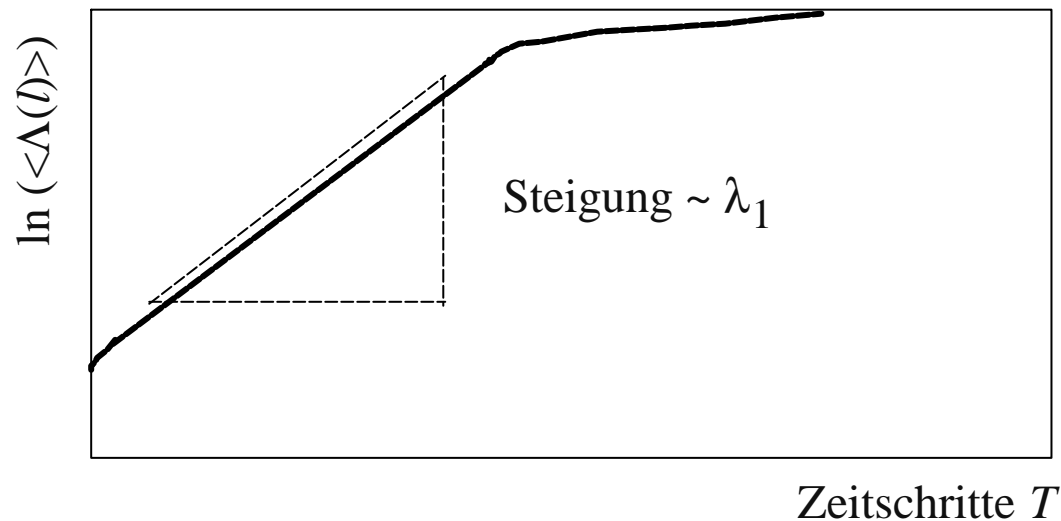
- suche neue benachbarte Trajektorie  $y_3(t)$  zu  $x(2T)$
- wiederhole  $l$ -mal

# Lyapunov-Exponenten

Bestimmung des größten Lyapunov-Exponenten (III):

- nach  $l$  Wiederholungen  $\Lambda(l) = \frac{d_l(T)}{d_l(0)}$

- größter Lyapunov-Exponent:  $\bar{\lambda}_1(T) = \frac{1}{T} \sum_l \ln \Lambda(l)$



beachte:  $m \geq 2D_0 + 1$

# *Lyapunov-Exponenten*

- **dynamisches** Maß der Attraktor-Eigenschaften
- Klassifizierung von Attraktoren mit Vorzeichen aus Lyapunov-Spektrum
- Stabilitätseigenschaften eines Systemzustandes
- mittlerer Informationsverlust bzgl. der Anfangsbedingungen aufgrund der Wirkungsweise einer i.A. nichtlinearen Funktion
- mittlere Prädiktionszeit

$$T_p \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^{j+} \lambda_i} \log(\rho^{-1})$$

$\rho$ : Lokalisationsgenauigkeit des Anfangszustandes

$j+$ : Index des letzten positiven Lyapunov-Exponenten